

Rappel: $z = a + ib = \underset{\text{cartésienne}}{\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \underset{\text{polaire trig.}}{\rho} \underset{\text{polaire exp.}}{e^{i\varphi}} \in \mathbb{C}$, $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$
 $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$ -38-

Formule de Moivre. $(\rho e^{i\varphi})^n = \rho^n e^{in\varphi}$, $\rho > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$ à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Ex. $z = 2 - 2\sqrt{3}i$. Trouver z^{15} .

$z^{15} = (2 - 2\sqrt{3}i)^{15} = (a + ib)^{15} = [\text{coefficients binomiaux}] \dots$ très long

$z \rightarrow$ forme polaire exp, et appliquer de Moivre:

$$|z| = \sqrt{4 + 12} = 4; \arg z = \operatorname{Arctg} \frac{-2\sqrt{3}}{2} = \operatorname{Arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

$\operatorname{Re} z = 2 > 0$

$$\Rightarrow z = 4e^{-i\frac{\pi}{3}} \xrightarrow{\text{de Moivre}} z^{15} = 4^{15} e^{-5\pi i} = 4^{15} e^{-\pi i} = -4^{15}$$

$$(a+ib)^3 = a^3 + 3a^2(ib) + 3a(ib)^2 + (ib)^3$$

			1	
		1	1	
	1	2	1	
1	3	3	1	
1	4	6	4	1

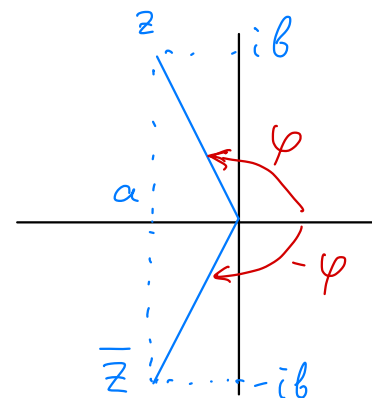
Conjugaison

Déf $z = a + ib \in \mathbb{C}$, alors le conjugué de z est $\bar{z} \stackrel{\text{déf}}{=} a - ib$

$$\text{Si } z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \Rightarrow z^{-1}z = 1 \Rightarrow \boxed{\bar{z}z = |z|^2} \in \mathbb{R}$$

Sous forme polaire:

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Rightarrow \bar{z} = \rho(\cos \varphi - i \sin \varphi) = \rho(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) \Rightarrow \boxed{\bar{z} = \rho e^{-i\varphi}}$$



Propriétés:

(1) $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$

(2) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(3) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}, w \neq 0$

(4) $|\overline{z}| = |z|$

$\forall z, w \in \mathbb{C}$

utiliser la forme cartésienne

utiliser la forme polaire

Exercice:
vérifier
les propriétés

(5) $z = a + ib, \overline{z} = a - ib \Rightarrow a =$

$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}$

$\operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$

$\forall z \in \mathbb{C}$

En particulier, si $|z| = 1$

$z = \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi} \Rightarrow$

$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$

$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$

$\forall \varphi \in \mathbb{R}$

Application: Exprimer $\sin^4 \varphi$ en termes des fonctions d'angle multiple

$$\sin^4 \varphi = \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^4 = \frac{1}{16} \left(e^{4i\varphi} - 4e^{3i\varphi} e^{-i\varphi} + 6e^{2i\varphi} e^{-2i\varphi} - 4e^{i\varphi} e^{-3i\varphi} + e^{-4i\varphi} \right) =$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$= \frac{1}{16} \left(e^{4i\varphi} - 4e^{2i\varphi} + 6 - 4e^{-2i\varphi} + e^{-4i\varphi} \right) = \frac{1}{8} \cos 4\varphi - \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{3}{8}$$

Racines des nombres complexes

Proposition Si $w = se^{i\varphi}$, $w \in \mathbb{C}^*$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\{z \in \mathbb{C}^* : z^n = w\} = \{\sqrt[n]{s} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Dém: Soit $z = r e^{i\vartheta}$, $r > 0$, $\vartheta \in \mathbb{R}$. Supposons que $z^n = w \Rightarrow \underbrace{r^n e^{in\vartheta} = se^{i\varphi}}_{\text{de Moivre}}$

$$\Rightarrow r^n = s > 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[n]{s} \text{ et } n\vartheta = \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \vartheta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{matrix} k=0 \Rightarrow \frac{\varphi}{n} \\ k=n \Rightarrow \frac{\varphi}{n} + 2\pi \end{matrix} \Rightarrow \text{même solution pour } k=0 \text{ et } k=n$$

$$\Rightarrow \{\vartheta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

$$\Rightarrow \{z \in \mathbb{C}^* : z^n = w\} = \{\sqrt[n]{s} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, k = 0, 1, \dots, n-1\}$$

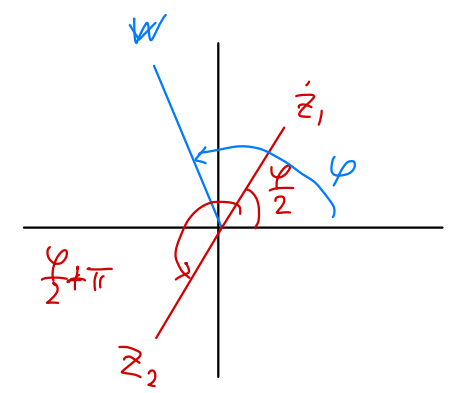


Racines carrées $z^2 = w = se^{i\varphi}$, $s > 0$. Alors

$$\{z = \sqrt{s} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{2}}, k = 0, 1\} = \{\sqrt{s} e^{i \frac{\varphi}{2}}, \sqrt{s} e^{i(\frac{\varphi}{2} + \pi)}\} \stackrel{e^{i\pi} = -1}{=} \{\sqrt{s} e^{i \frac{\varphi}{2}}, -\sqrt{s} e^{i \frac{\varphi}{2}}\}$$

$\Rightarrow$ il existe 2 racines carrées pour tout $w \neq 0$
 $w \in \mathbb{C}$

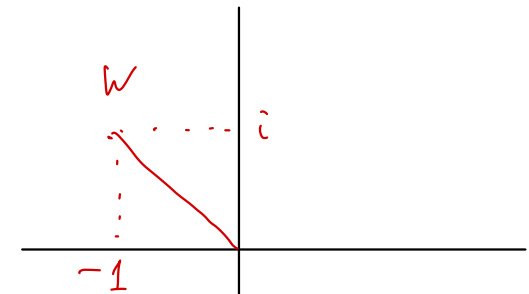
$$z_1^2 = z_2^2 = w, \quad z_1 = -z_2$$



Ex Résoudre $(-1+i) = z^3$, $z \in \mathbb{C}$

Soit $w = -1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$|w| = \sqrt{2}$, $\text{Arg} w = \underset{\text{Re} w < 0}{\text{Arctg} \frac{1}{-1} + \pi} = \text{Arctg}(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$



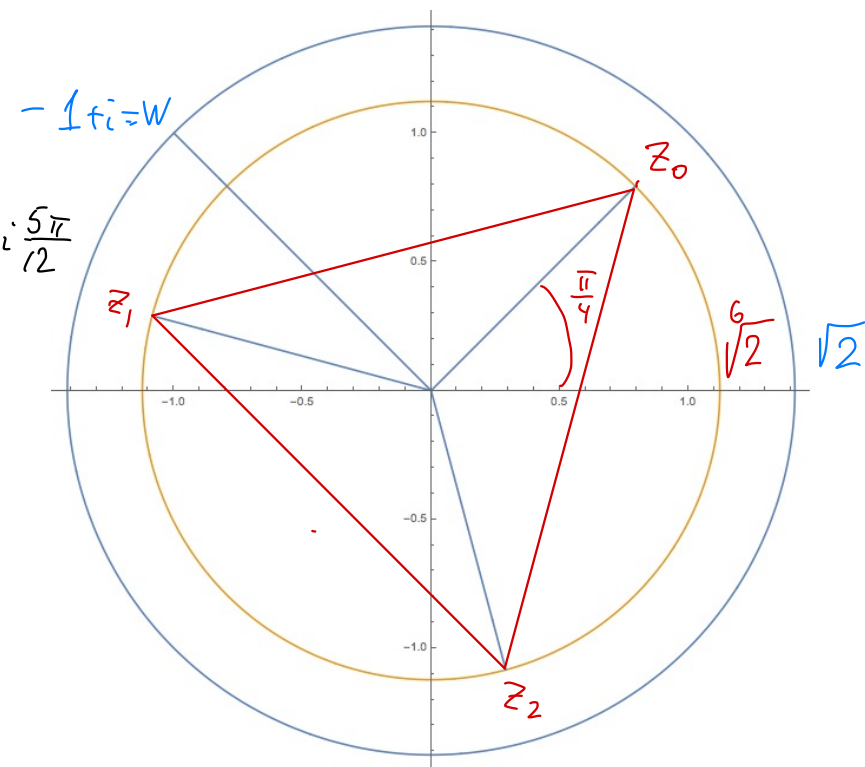
$\Rightarrow$ Proposition $\Rightarrow \{z : z^3 = w, z \in \mathbb{C}^*\} = \{\sqrt[6]{2} e^{i\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3}}, k=0,1,2\}$

Exercice: Calculer les arguments des 3 racines z_0, z_1, z_2

$k=0 \Rightarrow z_0 = \sqrt[6]{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

$k=1 \Rightarrow z_1 = \sqrt[6]{2} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})} = \sqrt[6]{2} e^{i\frac{11\pi}{12}}$

$k=2 \Rightarrow z_2 = \sqrt[6]{2} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3})} = \sqrt[6]{2} e^{i\frac{19\pi}{12}} = \sqrt[6]{2} e^{-i\frac{5\pi}{12}}$



Les trois solutions se trouvent au sommets d'un triangle équilatéral.

Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$.

-43-

Quadratique. dans $\mathbb{C}$ $az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$

$$\Rightarrow z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \leftarrow \text{racine carré d'un nombre complexe!}$$

$\Rightarrow$ Si $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ il y a une solution $z = -\frac{b}{2a}$ à multiplicité 2

$\Rightarrow$ Si $b^2 - 4ac \neq 0 \Rightarrow$ il existe toujours 2 solutions complexes.

Théorème fondamental de l'algèbre (sans démonstration)

Tout polynôme $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$
s'écrit sous la forme $P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$, où $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$
(peut-être avec des répétitions)

$$P(z) = a_n (z - w_1)^{m_1} (z - w_2)^{m_2} \dots (z - w_p)^{m_p} \quad \text{où } w_1, \dots, w_p \in \mathbb{C} \text{ distincts}$$

On dit que m_i est la multiplicité de la racine w_i .
 $m_1 + m_2 + \dots + m_p = n$, $m_1, \dots, m_p \in \mathbb{N}^*$.

Remarque. Ce n'est pas vrai dans $\mathbb{R}$.

Ex : $(x^2 + 4x + 8)(x^2 + 7) = P(x)$ degré 4, n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$.

Exercice Écrire $P(x)$ dans $\mathbb{C}$ en produit de 4 facteurs linéaires.

Ex. Est-ce que le polynôme $P(z) = z^2 + (1-i)z - i = \bar{P}(z)$ est divisible par $(z-i)$? ⁻⁴⁴⁻

On calcule $P(i) = i^2 + (1-i)i - i = -1 + i + 1 - i = 0 \Rightarrow z=i$ est une racine $\Rightarrow$ Oui.

Polynômes à coefficients réels.

Proposition Si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de $P(z)$ à coefficients réels alors $\bar{z}$ l'est aussi.

Dém: On va démontrer que $P(z)=0 \Rightarrow P(\bar{z})=0$ si $P(z)$ est à coeff. réels.

$$P(\bar{z}) = a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 = \sum_{k=0}^n \bar{a}_k \bar{z}^k = \sum_{k=0}^n \overline{a_k z^k} = \overline{\sum_{k=0}^n a_k z^k} =$$

$\sum_{k=0}^n a_k \bar{z}^k$ // notation $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$
 $\bar{a}_k = a_k \forall k$

$$\Rightarrow \text{Si } z \text{ est une racine} \Rightarrow \bar{z} \text{ l'est aussi.} \quad = \overline{P(z)} = \overline{0} = 0. \quad \square$$

Soit $P(z)$ à coefficients réels. Soit z_i une racine de $P(z)$.

Alors si $P(z_i)=0$ et $z_i \notin \mathbb{R} \Rightarrow \bar{z}_i$ est aussi une racine $\Rightarrow$

$(z - z_i)(z - \bar{z}_i)$ divise $P(z)$

$$(z - z_i)(z - \bar{z}_i) = (z^2 - \underbrace{z(z_i + \bar{z}_i)}_{2\operatorname{Re} z_i \in \mathbb{R}} + \underbrace{z_i \bar{z}_i}_{|z_i|^2 \in \mathbb{R}}) = (z^2 - (2\operatorname{Re} z_i)z + |z_i|^2) \text{ divise } P(z)$$

Conclusion Tout polynôme non-constant à coefficients réels peut être factorisé en produit des polynômes à coefficients réels de degré 1 ou 2.

Ex. $x^2 + 4x + 8$ n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$

Mais sur $\mathbb{C}$: $x^2 + 4x + 8 = (x + 2 + 2i)(x + 2 - 2i)$ sur $\mathbb{C}$.

Sous-ensembles du plan complexe.

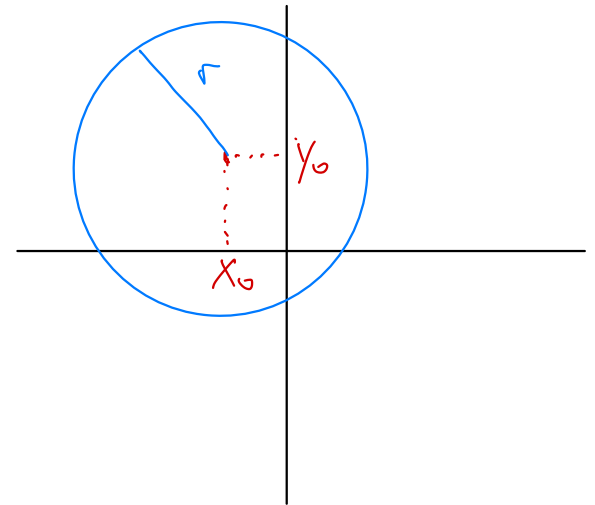
Ex 1. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ ($r \in \mathbb{R}$) Considérons $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$

$$|z - z_0| = |x + iy - x_0 - iy_0| = |x - x_0 + i(y - y_0)| =$$

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ z_0 &= x_0 + iy_0 \end{aligned} \quad = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

équation du cercle de rayon r
et centre (x_0, y_0) .



Ex.2 $\{z \in \mathbb{C}^* : \left(\frac{z}{|z|}\right)^3 = i\}$

$$z = \rho e^{i\varphi}, \rho > 0 \Rightarrow \left(\frac{\cancel{\rho} e^{i\varphi}}{\cancel{\rho}}\right)^3 = i \Rightarrow e^{3i\varphi} = i = e^{\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i}$$

$$\Rightarrow \varphi \in \left\{ \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}, k=0,1,2 \right\} = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right\}$$

$\Rightarrow \rho$ est arbitraire ! , 3 directions $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 3 demi-droites ouvertes.

